

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ И ФОТОМЕТРИИ

Основные законы и формулы

1 Закон преломления света

$$\sin I / \sin r = n_{21} = v_1 / v_2 \quad (n_{21} = n_2 / n_1)$$

2 Предельный угол полного внутреннего отражения

$$i_{\text{пред}} = \arcsin(n_2 / n_1) \quad (n_2 < n_1)$$

3 Фокусное расстояние сферического зеркала

$$F = R / 2$$

и

$$\frac{1}{F} = \frac{2}{R} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2},$$

$a_2 < 0$, если изображение мнимое,

$F < 0$, если фокус сферического зеркала мнимый (зеркало выпуклое)

4 Оптическая сила сферического зеркала

$$D = 1 / F$$

5 Оптическая сила тонкой линзы

$$D = 1 / F = (n_{\text{линзы}} / n_{\text{среды}} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

и

$$\frac{1}{F} = \frac{2}{R} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$$

правило знаков такое же, как и в п.8.1.3

6 Оптическая сила двух тонких линз, сложенных вместе

$$D = D_1 + D_2$$

7 Поперечное увеличение сферических зеркал и линз

$$\kappa = \frac{h'}{h} = \frac{a_2}{a_1}$$

8 Увеличение, даваемое лупой

$$k = L/F$$

L – расстояние наилучшего зрения ($L = 25 \text{ см}$)

9 Увеличение, даваемое микроскопом

$$k = LdD_1D_2$$

10 Световой поток

$$\Phi = dW/dt$$

11 Сила света

$$I = d\Phi/d\omega$$

12 Полный световой поток, испускаемый изотропным источником

$$\Phi_0 = 4 \pi I$$

13 Освещённость поверхности

$$E = d\Phi / dS \quad \text{и} \quad E = I \cos\alpha / r^2$$

14 Светимость тела

$$R = d\Phi / dS$$

15 Светимость, вызванная освещённостью тела (за счёт отражения лучей)

$$R = \rho E$$

16 Яркость светящейся поверхности

$$B = \frac{dI}{dS \cos\theta}$$

17 Соотношение между светимостью и яркостью ламбертовского источника

$$R = \pi B$$

Примеры решения задач

Задача 1. На плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d=5\text{см}$ с показателем преломления $n=1,5$ падает луч света под углом $i=30^\circ$. Определить боковое смещение луча, прошедшего через эту пластинку.

Дано:
 $n=1,5$
 $d=5\text{см}=0,05\text{м}$
 $i=30^\circ$
 $x=?$

Решение: Искомое боковое смещение луча x на рисунке 8.1 изображено отрезком DC. Для его определения воспользуемся законом преломления света и геометрическим построением хода световых лучей (рис. 8.1).

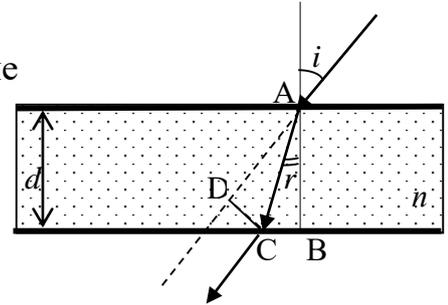


Рисунок 8.1

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{21} = n,$$

отсюда:

$$\sin r = \frac{\sin i}{n}. \quad (8.1)$$

Из $\triangle ADC$ искомое смещение x равно:

$$\begin{aligned} x = AC \sin(i - r) &= \frac{d}{\cos r} \sin(i - r) = \frac{d(\sin i \cdot \cos r - \sin r \cdot \cos i)}{\cos r} = \\ &= d \sin i \left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right) \end{aligned} \quad (8.2)$$

Подставим в формулу (1.2) числовые значения и произведём расчёт:

$$x = 0,05 \sin 30^\circ \left(1 - \frac{\cos 30^\circ}{\sqrt{2,25 - \sin^2 30^\circ}} \right) = 9,69 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 9,69 \text{ мм}$$

Ответ: 9,69 мм.

Задача 2. Расстояние a_1 от предмета до вогнутого сферического зеркала равно двум радиусам кривизны. Определить положение изображения предмета и построить это изображение.

Дано: $a_1 = 2R$
 $a_2 = ?$

Решение: Запишем формулу вогнутого сферического зеркала:

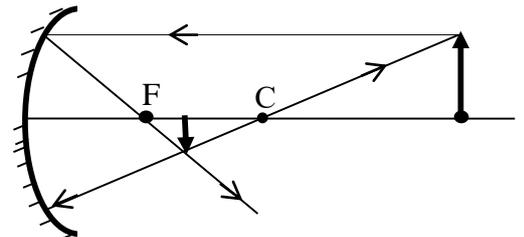
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{R} = \frac{1}{F}, \quad (8.3)$$


Рисунок 8.2

Так как по условию задачи $a_1 = 2R$, то формула (8.3) примет вид:

$$\frac{1}{2R} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{R}, \quad \frac{1}{a_2} = \frac{1}{R} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2R}, \quad a_2 = \frac{2}{3} R.$$

Ответ: $a_2 = \frac{2}{3} R$.

Задача 3. Воздушная полость в стекле имеет форму плосковыпуклой линзы. Найти фокусное расстояние этой линзы, если известно, что фокусное расстояние стеклянной линзы, совпадающей по форме с полостью, равно в воздухе F_0 .

Решение: Запишем формулу линзы:

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n_{\text{линзы}}}{n_{\text{среды}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (8.4)$$

Согласно формуле (8.4), плосковыпуклая линза ($R_1 = \infty$, $R_2 = R$) может быть и собирающей и рассеивающей в зависимости от того, что больше, показатель преломления материала линзы или показатель преломления среды, в которой находится линза. В первом случае, когда воздушная линза находится в стекле ($n_{\text{лин}} = 1$, $n_{\text{ср}} = n$), её оптическая сила равна:

$$\frac{1}{F_1} = \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{1}{R}. \quad (8.5)$$

Во втором случае, когда стеклянная линза находится в воздухе ($n_{\text{лин}} = n$, $n_{\text{ср}} = 1$),

$$\frac{1}{F_0} = (n - 1) \frac{1}{R}. \quad (8.6)$$

Из уравнений (8.5) и (8.6) находим:

$$F_1 = -nF_0.$$

Ответ: $F_1 = -nF_0$.

Задача 4. Из плоскопараллельной стеклянной пластинки изготовили три линзы (рисунок 1.4). Фокусное расстояние линз 1 и 2, сложенных вместе, равно $-F'$, фокусное расстояние линз 2 и 3 равно $-F''$. Определить фокусное расстояние каждой линзы.

Решение: Как видно из рисунка, первая и третья линзы плоско-выпуклые, их оптические силы равны $1/F_1$ и $1/F_3$, вторая линза двояковогнутая, её оптическая сила равна $-1/F_2$.

Так как три линзы, сложенные вместе, образуют плоскопараллельную пластинку, то оптическая сила системы равна нулю ($R_1 = \infty$ и $R_2 = \infty$). С другой стороны, оптическая сила системы линз равна сумме оптических сил линз, входящих в систему. Поэтому имеем:

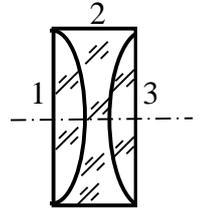


Рисунок 8.4

$$\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} = 0 \quad (8.7)$$

Согласно условию задачи имеем:

$$\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} = -\frac{1}{F'} \quad (8.8)$$

и

$$-\frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} = -\frac{1}{F''}. \quad (8.9)$$

Решая уравнения (8.7) - (8.9) совместно, получим:

$$F_1 = F''; \quad F_2 = \frac{F' \cdot F''}{F' + F''}; \quad F_3 = F'.$$

Ответ: $F_1 = F''; \quad F_2 = \frac{F' \cdot F''}{F' + F''}; \quad F_3 = F'.$

Задача 5. Спираль электрической лампочки силой света в 1000 кд заключена в матовую сферическую колбу диаметром 20 см. Найти: 1) световой поток, излучаемый этим источником света, 2) светимость и яркость этого источника света, 3) освещённость, светимость и яркость экрана площадью $0,25 \text{ м}^2$, на который падает 10% светового потока, излучаемого источником света. Коэффициент отражения света поверхностью экрана принять равным $\rho = 0,8$. Считать, что поверхность экрана рассеивает свет по закону Ламберта.

Дано:
 $I = 1000$ кд
 $d = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$
 $k = 10\%$
 $\rho = 0,8$
 $S_1 = 0,25 \text{ м}^2$
 $\Phi - ?$ $R_1 - ?$ $B_1 - ?$
 $E - ?$ $R_2 - ?$ $B_2 - ?$

Решение: 1) Так как спираль электрической лампочки заключена в матовую колбу, то источник света можно считать изотропным. Для него полный световой поток связан с силой света соотношением:

$$\Phi = 4 \pi I$$

Подставим числовые значения и произведём расчёт:

$$\Phi = 4 \cdot 3,14 \cdot 10^3 = 1,26 \cdot 10^4 \text{ лм}$$

2) Светимость источника по определению равна:

$$R = \Phi / S. \quad (8.10)$$

Учтём, что $\Phi = 4 \pi I$ и $S = 4 \pi r^2 = \pi d^2$, и подставим эти выражения в формулу (8.10):

$$R = 4 \pi I / \pi d^2 = 4I / d^2$$

Подставим числовые значения из условия задачи и произведём расчёты:

$$R = 4 \cdot 10^3 / (0,2)^2 = 10^5 \text{ лм/м}^2.$$

По определению, яркость источника выражается формулой:

$$B = \frac{dI}{dS \cos \theta},$$

так как источник света изотропный, то это выражение можно записать в виде:

$$B = \frac{I}{S \cos \theta} = \frac{I}{\Delta S'}, \quad (8.11)$$

где $\Delta S'$ - видимая площадка светящейся поверхности, $\Delta S' = \pi r^2$, r - радиус колбы. Тогда формула (8.11) примет вид:

$$B = I / \pi r^2.$$

Подставим числовые значения и произведём расчёты:

$$B = 10^3 / (3,14 \cdot 0,1^2) = 3,18 \cdot 10^4 \text{ кд/м}^2.$$

3) По условию на экран падает 10% от всего светового потока, следовательно $\Phi_1 = 0,1 \Phi = 1,26 \cdot 10^3$ лм. Тогда освещённость экрана, согласно определению, будет:

$$E_1 = \Phi_1 / S_1$$

$$E_1 = 1,26 \cdot 10^3 / 0,25 \approx 5 \cdot 10^3 \text{ лк}$$

Так как экран светится за счёт отражения падающих на него световых лучей, то светимость экрана определится по формуле:

$$R_1 = \frac{\rho \Phi_1}{S_1} = \rho E_1$$

$$R_1 = 0,85 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^3 \text{ лм/м}^2.$$

Яркость экрана найдём с помощью формулы, связывающей яркость и светимость:

$$B_1 = R_1 / \pi$$

$$B_1 = 4 \cdot 10^3 / 3,14 = 1,3 \cdot 10^3 \text{ кд/м}^2.$$

Ответ: $\Phi = 1,26 \cdot 10^4$ лм; $R = 10^5$ лм/м²; $B = 3,18 \cdot 10^4$ кд/м²; $E_1 = 5 \cdot 10^3$ лк;
 $R_1 = 4 \cdot 10^3$ лм/м²; $B_1 = 1,3 \cdot 10^3$ кд/м².

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Таблица 1. Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Ускорение свободного падения	g	9,81 м/с ²
Гравитационная постоянная	G	6,67·10 ⁻¹¹ м ³ /(кг·с ²)
Число Авогадро	N_A	6,02·10 ²³ моль ⁻¹
Универсальная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	k	1,38·10 ⁻²³ Дж/К
Элементарный заряд	e	1,60·10 ⁻¹⁹ Кл
Скорость света в вакууме	c	3,00·10 ⁸ м/с
Масса покоя электрона	m_e	9,1·10 ⁻³¹ кг
Масса покоя протона	m_p	1,67·10 ⁻²⁷ кг
Нормальные условия: давление	P	1,01·10 ⁵ Па
температура	T	273 К
Электрическая постоянная	ϵ_0	8,85·10 ⁻¹² Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	4π·10 ⁻⁷ Гн/м
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	5,67·10 ⁻⁸ $\frac{Вт}{м^2 \cdot К^4}$
Постоянная Вина (первый закон)	b	2,9 ·10 ⁻³ м·К
Постоянная Вина (второй закон)	c	1,3 ·10 ⁻⁵ Вт/(м ³ ·К ⁵)
Постоянная Планка	h	6,63·10 ⁻³⁴ Дж·с
	\hbar	1,05·10 ⁻³⁴ Дж·с
Постоянная Ридберга	R	1,1·10 ⁷ м ⁻¹
	R'	3,3·10 ¹⁵ с ⁻¹
Энергия ионизации атома водорода	E_i	2,18·10 ⁻¹⁸ Дж (13,6эВ)
Атомная единица массы	$1a.e.m$	1,660·10 ⁻²⁷ кг
Радиус Бора	a_0	0,529·10 ⁻¹⁰ м
Модуль Юнга для стали	E	0,2 ТПа

Таблица 2. Плотность твердых тел

Твердое тело	Плотность кг/м ³	Твердое тело	Плотность кг/м ³	Твердое тело	Плотность кг/м ³
Алюминий	2,70·10 ³	Железо	7,88·10 ³	Свинец	11,3·10 ³
Барий	3,50·10 ³	Литий	0,53·10 ³	Серебро	10,5·10 ³
Ванадий	6,02·10 ³	Медь	8,93·10 ³	Цезий	1,90·10 ³
Висмут	9,80·10 ³	Никель	8,90·10 ³	Цинк	7,15·10 ³
Латунь	8,4·10 ³	Сталь	7,70·10 ³	Фарфор	2,3·10 ³

Таблица 3. Плотность жидкостей

Жидкость	Плотность кг/м ³	Жидкость	Плотность кг/м ³
Вода (при 4 °С)	1,00·10 ³	Сероуглерод	1,26·10 ³
Глицерин	1,26·10 ³	Спирт	0,80·10 ³
Ртуть	13,6·10 ³	Касторовое масло	0,9·10 ³
Машинное масло	0,9·10 ³	Нефть	0,85·10 ³

Таблица 4. Плотность газов (при нормальных условиях)

Газ	Плотность кг/м ³	Газ	Плотность кг/м ³
Аргон	1,78	Гелий	0,18
Водород	0,09	Кислород	1,43
Воздух	1,29	Азот	1,25

Таблица 5. Эффективный диаметр молекул, динамическая вязкость и теплопроводность газов при нормальных условиях

Вещество	Эффективный диаметр d·10 ¹⁰ , м	Динамическая вязкость η, мкПа·с	Теплопроводность α, мВт/(м·К)
Азот	0,38	16,6	24,3
Аргон	0,35	21,5	16,2
Водород	0,28	8,66	168
Воздух	0,27	17,2	24,1
Гелий	0,22	18,9	142
Кислород	0,29	19,8	24,4
Пары воды	0,30	8,32	15,8

Таблица 6. Динамическая вязкость η жидкостей при 20 °С

Вещество	Динамическая вязкость η, мПа·с	Вещество	Динамическая вязкость η, мПа·с
Вода	1,00	Масло машинное	100
Глицерин	1480	Ртуть	1,58
Масло касторовое	987		

Таблица 7. Молярные массы некоторых газов

Газ	Молярная масса $\mu \cdot 10^3$, кг/моль	Газ	Молярная масса $\mu \cdot 10^3$, кг/моль
Гелий	4	Углерод	24
Аргон	40	Азот	28
Неон	20	Воздух	29
Водород	2	Пары воды	18
Кислород	32		

Таблица 8. Удельная теплоемкость

Вещество	Удельная теплоемкость c , Дж/(кг·К)	Вещество	Удельная теплоемкость c , Дж/(кг·К)
Вода	4190	Нихром	220
Лед	2100	свинец	126

Таблица 9. Удельная теплота плавления

Вещество	Удельная теплота плавления λ , Дж/кг
Лед	$33,5 \cdot 10^4$
Свинец	$2,3 \cdot 10^4$

Таблица 10. Удельная теплота парообразования

Вещество	Удельная теплота парообразования r , Дж/кг
Вода	$22,5 \cdot 10^5$
Эфир	$6,68 \cdot 10^5$

Таблица 11. Диэлектрическая проницаемость

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Парафин	2,0	Вода	81
Стекло	7,0	Масло трансформаторное	2,2

Таблица 12. Удельное сопротивление металлов

Металл	Удельное сопротивление металлов, Ом·м	Металл	Удельное сопротивление металлов, Ом·м
Железо	$9,8 \cdot 10^{-8}$	Медь	$1,72 \cdot 10^{-8}$
Нихром	$1,1 \cdot 10^{-6}$	Серебро	$1,6 \cdot 10^{-8}$
Никелин	$4 \cdot 10^{-7}$		

Таблица 13. Показатель преломления

Вещество	Показатель	Вещество	Показатель
Алмаз	2,42	Глицерин	1,47
Вода	1,33	Стекло	1,50

Таблица 14. Масса и энергия покоя некоторых частиц

Частица	m_0		E_0	
	кг	а.е.м.	Дж	МэВ
Электрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1,672 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1876
α -частица	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733
Нейтральный мезон π -	$2,41 \cdot 10^{-28}$	0,14498	$2,16 \cdot 10^{-11}$	135

Таблица 15. Работа выхода электронов

Металл	Дж	эВ
Калий	$3,5 \cdot 10^{-19}$	2,2
Литий	$3,7 \cdot 10^{-19}$	2,3
Серебро	$7,5 \cdot 10^{-19}$	4,7
Цинк	$6,4 \cdot 10^{-19}$	4,0

Таблица 16. Относительные атомные массы (атомные веса) A и порядковые номера Z некоторых элементов

Элемент	Химический символ	A	Z
Азот	N	14	7
Алюминий	Al	27	13
Водород	H	1	1
Вольфрам	W	184	74
Гелий	He	4	2
Железо	Fe	56	26
Золото	Au	197	79
Калий	K	39	19
Кальций	Ca	40	20
Кислород	O	16	8
Магний	Mg	24	12
Марганец	Mn	55	25
Медь	Cu	64	29
Молибден	Mo	96	42
Натрий	Na	23	11
Никель	Ni	59	28
Платина	Pt	195	78
Сера	S	32	16
Серебро	Ag	108	47
Уран	U	238	92
Углерод	C	12	6
Хлор	Cl	35	17

Таблица 17. Периоды полураспада радиоактивных изотопов.

Изотоп	Символ	Период полураспада
Магний	${}_{12}\text{Mg}^{27}$	10 мин
Фосфор	${}_{15}\text{P}^{32}$	14,3 суток
Кобальт	${}_{27}\text{Co}^{60}$	5,3 года
Стронций	${}_{38}\text{Sr}^{90}$	27 лет
Йод	${}_{53}\text{I}^{131}$	8 суток
Актиний	${}_{89}\text{Ac}^{225}$	10 суток
Торий	${}_{90}\text{Th}^{229}$	$7 \cdot 10^3$ лет
Уран	${}_{92}\text{U}^{238}$	$4,5 \cdot 10^9$ лет
Радий	${}_{88}\text{Ra}^{219}$	10^{-3} сек
	${}_{88}\text{Ra}^{226}$	$1,62 \cdot 10^3$ лет

Таблица 18. Массы нейтрона и некоторых атомов

Изотоп	Символ	Масса (а.е.м)
Нейтрон	${}_0n^1$	1,00867
Водород	${}_1H^1$	1,00783
	${}_1H^2$	2,01410
	${}_1H^3$	3,01605
Гелий	${}_2He^3$	3,01603
	${}_2He^4$	4,00260
Литий	${}_3Li^6$	6,01513
	${}_3Li^7$	7,01601
Бериллий	${}_4Be^7$	7,01693
	${}_4Be^9$	9,01219
Бор	${}_5B^{10}$	10,01294
	${}_5B^{11}$	11,00930
Углерод	${}_6C^{12}$	12,00000
	${}_6C^{13}$	13,00335
	${}_6C^{14}$	14,00324
Азот	${}_7N^{14}$	14,00307
Кислород	${}_8O^{16}$	15,99491
	${}_8O^{17}$	16,99913
Магний	${}_{12}Mg^{23}$	22,99414

Таблица 19. внесистемные единицы, допущенные к применению наравне с единицами СИ, их связь с единицами СИ

Наименование величины	Единица		
	Название	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна	т	$1\text{т} = 10^3 \text{ кг}$
	атомная единица массы	а.е.м.	$1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Время	минута	мин	$1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$
	час	ч	$1\text{ч} = 3600 \text{ с}$
	сутки	сут	$1 \text{ сут} = 86400 \text{ с}$
	год	год	$1 \text{ год} = 365,25 \text{ сут} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ с}$
Работа, энергия	электрон -вольт	эВ	$1\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

Таблица 20. Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$
Масса Земли	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Радиус Солнца	$6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$
Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}$

Таблица 21. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка		Множитель	Приставка		Множитель
Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение	
экса	Э	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пэта	П	10^{15}	санتي	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	милли	м	10^{-3}
гига	Г	10^9	микро	мк	10^{-6}
мега	М	10^6	нано	н	10^{-9}
кило	к	10^3	пико	п	10^{-12}
гекто	г	10^2	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^1	атто	а	10^{-18}